

# CINEMATIQUE DU POINT

## I. REPERAGE DES EVENEMENTS

L'étude du mouvement nécessite un paramétrage préalable dans l'espace et le temps. Pour un observateur donné, un événement est repéré par sa position et l'instant où il se produit. **Sa description dépend de l'observateur qui le décrit donc du référentiel d'étude.**

### 1. Référentiel et repère

- **Référentiel**

→ *Référentiel d'espace* : système de référence, solide indéformable  $S$ , par rapport auquel l'observateur décrit le mouvement étudié.

Exemples : référentiel de Copernic, référentiel terrestre, référentiel lié à un véhicule en mouvement....

→ *Référentiel de temps* : horloge permettant de mesurer les intervalles de temps (durées).

- **Repère**

→ Repère *d'espace* :  $R$

Choix d'une origine  $O$  liée à  $S$  et de 3 axes  $(\overline{Ox}, \overline{Oy}, \overline{Oz})$  également liés à  $S$  auxquels sont associés 3 vecteurs unitaires  $(\overline{e_x}, \overline{e_y}, \overline{e_z})$ . Les bases utilisées seront toujours **orthonormées directes**.

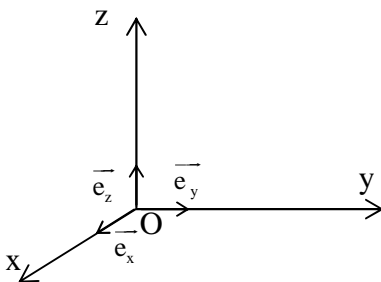
Remarque : pour un référentiel donné, il existe une infinité de  $R$  repères différents.

→ Repère *de temps* :  $T$

Pour connaître l'instant d'existence d'un phénomène physique, un observateur se réfère à une échelle de temps (instant d'origine  $t=0$ , unité SI de temps : la seconde), orientée suivant les temps croissants. Contrairement à l'espace, en mécanique "classique", le temps est absolu, c'est à dire indépendant de l'observateur (du référentiel d'étude).

On appelle référentiel lié à un solide  $S$  de référence, le repère d'espace-temps qui associe une échelle de temps à un repère spatial  $R$  lié à  $S$ . Le temps étant absolu, on utilisera la même notation  $R$  pour le référentiel et le repère qui lui est associé.

### 2. Repérage de l'espace - Principaux systèmes de coordonnées (paramétrage)



Soit  $R (O, \overline{Ox}, \overline{Oy}, \overline{Oz})$  le repère d'espace choisi et  $(\overline{e_x}, \overline{e_y}, \overline{e_z})$  la base orthonormée directe liée à  $R$ .

Dans  $R$ , la position d'un point  $M$  sera repérée par le **vecteur position**  $\overline{OM} = \vec{r}$ , qui se décompose de façon unique dans une base  $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ . La position de  $M$  sera donc définie par **3 paramètres, ses coordonnées**.

*Remarques* : a) pour un repère donné, il existe plusieurs types de coordonnées.

b) le choix d'un système de coordonnées est lié au choix de la base dans laquelle on exprime le vecteur position.

c) les 3 coordonnées choisies permettent d'exprimer le vecteur position dans n'importe quelle base.

• **Coordonnées cartésiennes :  $M(x,y,z)$**

Les 3 coordonnées  $x, y$  et  $z$  sont des paramètres de longueur (unité SI de longueur : le mètre)

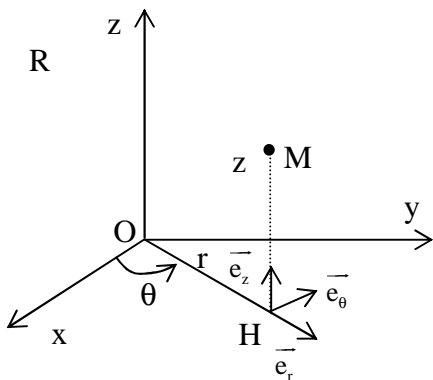
Ce sont les composantes de  $\vec{OM}$  dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  liée à R :  $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Remarques : a)  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est une **base fixe**

b) Ce paramétrage cartésien est adapté aux mouvements rectilignes (chute verticale, système solide-ressort...)

• **Coordonnées cylindriques :  $M(r,\theta,z)$**

Les 2 coordonnées  $r$  et  $z$  sont des paramètres de longueur,  $\theta$  est un paramètre angulaire.



\* Choix d'un plan de référence de R : plan polaire  $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$  et dans ce plan d'un axe de référence  $\vec{Ox}$  (par exemple).

\*  $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

H projection orthogonale de M sur le plan polaire

Les coordonnées cylindriques de M sont définies par :

$$\begin{cases} r = \|\vec{OH}\| & \text{rayon polaire } \geq 0 \\ \theta = (\vec{Ox}, \vec{OH}) = (\vec{e}_x, \vec{e}_r) & \text{angle polaire } 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = \vec{OM} \cdot \vec{e}_z & \text{cote de M (coordonnée cartésienne)} \end{cases}$$

La base locale utilisée en coordonnées cylindriques :  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  avec  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$

Si M appartient à un plan fixe de R (exemple :  $xOy$ ), on choisit ce plan comme plan polaire, on parle de **coordonnées polaires  $(r,\theta)$** .

Remarques : a) La base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est **mobile**.

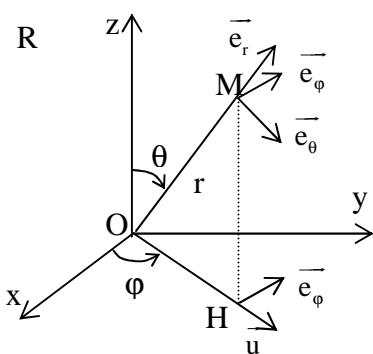
b) Ce paramétrage polaire est adapté aux mouvements circulaires (mouvements des satellites et planètes, pendule simple...).

Application : Trouver les relations entre coordonnées cartésiennes et cylindriques.

Réponses :  $x = r \cdot \cos(\theta)$  et  $y = r \cdot \sin(\theta)$  soit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

• **Coordonnées sphériques :  $M(r,\theta,\varphi)$**

$r$  : paramètre de longueur ;  $\theta$  et  $\varphi$  paramètres angulaires.



$$\begin{cases} r = \|\vec{OM}\| \geq 0 \\ \theta = (\vec{e}_z, \vec{e}_r) = (\vec{Oz}, \vec{OM}) & \text{colatitude } 0 \leq \theta \leq \pi \\ \varphi = (\vec{Ox}, \vec{OH}) & \text{longitude } 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

\* base locale associée :  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  où  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$   
avec  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$

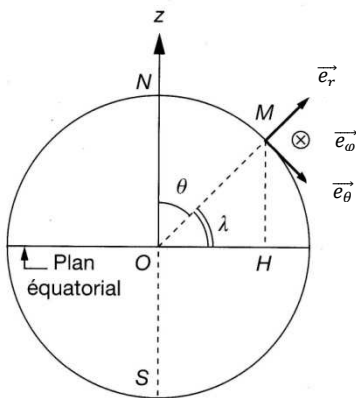
Application : Trouver les relations entre coordonnées sphériques et cartésiennes.

Réponses :  $x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$ ,  $y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$ ,  $z = r \cdot \cos(\theta)$ .

**Remarque : coordonnées géographiques**

Elles sont déduites des coordonnées sphériques dans un référentiel terrestre.

Le repère associé est tel que  $\vec{Oz} = \vec{SN}$  (axe sud-nord),  $\vec{Ox}$  axe coupant l'équateur au méridien de Greenwich (plan  $xOy$  = plan équatorial).



- $\vec{e}_r$  : suivant la verticale du point M
- $\vec{e}_\theta$  : dirigé vers le sud
- $\vec{e}_\phi$  : dirigé vers l'est

coordonnées géographiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{altitude } h = r - R_T \\ \text{latitude } \lambda = \frac{\pi}{2} - \theta \\ \text{longitude } \varphi \end{array} \right.$$

**II. MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL DANS UN REFERENTIEL (repère associé R)**

On appelle **point matériel**, un solide dont la position est entièrement définie par la seule donnée des trois coordonnées d'un point du solide. Cela revient à négliger tout effet de rotation du solide sur lui-même ou son extension spatiale.

**1. Définitions**

M est en mouvement dans R si au moins une de ses coordonnées varie avec le temps  $t$  :  $\vec{OM}(t)$

Point matériel - point coïncident : au point matériel M, on associe le point géométrique  $M_R$  - point coïncident - fixe dans R et confondu à l'instant  $t$  avec M.

Trajectoire de M dans R : courbe  $C$  = ensemble des points coïncidents avec M au cours de son mouvement dans R.

Vitesse de M dans R :  $\vec{v}(M/R, t) = \vec{v}(M/R) = \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R$

$[V] = L.T^{-1}$  unité S.I. :  $m.s^{-1}$

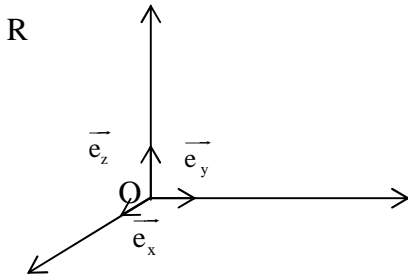
$\vec{v}(M/R) = v.\vec{T}$   $\vec{T}$  vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire C de M dans R.

Accélération de M dans R :  $\vec{a}(M/R, t) = \vec{a}(M/R) = \left( \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt} \right)_R = \left( \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_R$

$[A] = L.T^{-2}$  unité S.I. :  $m.s^{-2}$

**Remarque :** Trajectoire, vitesse et accélération sont relatives à un référentiel donné.

## 2. Composantes de la vitesse et de l'accélération dans R



Remarque : on utilisera, indifféremment pour exprimer les dérivées d'une grandeur  $\alpha$  ( $\alpha(t)$ ) par rapport au temps  $t$ , les notations :

dérivée première :  $\dot{\alpha}$  ou  $\frac{d\alpha}{dt}$

dérivée seconde :  $\ddot{\alpha}$  ou  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$

- **Coordonnées cartésiennes** : la trajectoire est définie par  $\{x(t), y(t), z(t)\}$

On utilise la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  liée au repère R.

Base **FIXE** dans R :  $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_R = \vec{0}$  etc ...

Expressions de  $\vec{v}(M/R)$  et de  $\vec{a}(M/R)$  :

$$\vec{v}(M/R) = \dot{x} \cdot \vec{e}_x + \dot{y} \cdot \vec{e}_y + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{v}(M/R) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{e}_z$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$\vec{v}(M/R) = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a}(M/R) = \ddot{x} \cdot \vec{e}_x + \ddot{y} \cdot \vec{e}_y + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{e}_z$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$\vec{a}(M/R) = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \dots \text{etc}$$

- **Coordonnées cylindriques** : la trajectoire est définie par  $\{r(t), \theta(t), z(t)\}$

On utilise la base locale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Base **MOBILE** dans R :  $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R = \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$   $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_R = -\dot{\theta} \cdot \vec{e}_r$

Expressions de  $\vec{v}(M/R)$  et de  $\vec{a}(M/R)$  :

$$\vec{v}(M/R) = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a}(M/R) = \left(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2\right) \cdot \vec{e}_r + \left(2\dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}\right) \cdot \vec{e}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z$$

**Application** : retrouver les quatre expressions encadrées.

Remarques : a) les composantes des vecteurs sur  $\vec{e}_r$  sont dites radiales, sur  $\vec{e}_\theta$  orthoradiales et sur  $\vec{e}_z$  axiales.

b) La dérivée d'un vecteur de norme constante dans R vérifie :  
 $\vec{A}$  tel que  $\vec{A} \cdot \vec{A} = \text{cste}$   $2 \cdot \vec{A} \cdot \left(\frac{d\vec{A}}{d\alpha}\right)_R = 0$   $\left(\frac{d\vec{A}}{d\alpha}\right)_R \perp \vec{A}$

### III. EXEMPLES DE MOUVEMENTS

#### 1) Mouvements uniforme, accéléré, décéléré

On distingue trois types de mouvements suivant l'évolution en fonction du temps de la norme du vecteur vitesse  $\|\vec{v}\|$ .

| Nature du mouvement | Uniforme  | Accéléré                    | Décéléré                    |
|---------------------|---|-----------------------------|-----------------------------|
| Définition          | $\ \vec{v}\  = \text{constante}$  | $\ \vec{v}\ $ croissante    | $\ \vec{v}\ $ décroissante  |
| Condition           | $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$<br>Soit $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.<br>Soit $\vec{v} = 0$ ou<br>$\vec{a} = 0$ avec $\vec{v} = \overline{\text{constante}}$ | $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ | $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ |

Démonstration des conditions :  $\|\vec{v}\|$  varie au cours du temps comme  $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$  d'où  $\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = \frac{d\vec{v} \cdot \vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$  avec  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  le vecteur accélération.

**Remarque : Ne pas confondre norme et vecteur constant** -  $\|\vec{v}\| = \text{constant} \neq \vec{v} = \overline{\text{constante}}$  -

En effet un vecteur constant conserve la même norme, la même direction et le même sens au cours du temps alors qu'un vecteur de norme constante peut changer de sens et de direction au cours du temps.

#### 2) Mouvements rectilignes

##### a) Définition

Un mouvement est dit rectiligne s'il correspond à un déplacement le long d'une droite fixe dans le référentiel d'étude.

On peut arbitrairement confondre l'un des axes du repère  $(O, \overline{Ox}, \overline{Oy}, \overline{Oz})$  associé au référentiel d'étude avec la droite du mouvement.

En prenant par exemple l'axe (Ox) les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point M s'écrivent :

$$\begin{cases} \overline{OM} = x\vec{e}_x \\ \vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x \end{cases}$$

##### b) Cas du mouvement rectiligne uniforme

Le point M est contraint à se déplacer suivant une même direction fixe en conservant la même valeur pour la norme de sa vitesse.

Par conséquent le vecteur vitesse se conserve au cours du mouvement rectiligne uniforme :  
 $\vec{v} = \overline{\text{constante}}$ .

Les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point M s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{v} = \overline{\text{constante}} = \vec{v}_0 \text{ avec } \vec{v}_0 \text{ la vitesse de } M \text{ à l'instant initial } (t = 0) \\ \overline{OM} = \vec{v}_0 \cdot t + \overline{OM}_0 \text{ où } M_0 \text{ est le point coïncident avec } M \text{ à l'instant initial} \end{cases}$$

### c) Cas du mouvement rectiligne sinusoïdal

En prenant par exemple l'axe (Ox) comme droite du mouvement, le vecteur position s'écrit pour un mouvement rectiligne sinusoïdal :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x \quad \text{avec} \quad x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{où :}$$

- $X_m$  est l'amplitude du mouvement oscillatoire
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  est la pulsation du mouvement oscillatoire (T la période et f la fréquence)
- $\varphi$  est la phase à l'origine (t=0)

Remarque :

$$\text{- Vitesse : } \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{- Accélération : } \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

La position et la vitesse ainsi que la vitesse et l'accélération sont en quadrature de phase, c'est-à-dire déphasées de  $\frac{\pi}{2}$  (lorsque l'une est nulle l'autre est extrême et inversement).

La position et l'accélération sont en opposition de phase, c'est-à-dire déphasées de  $\pi$  (lorsque l'une est minimale l'autre est maximale et inversement).

### 3) Mouvements à accélération constante

Les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point M s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \overrightarrow{\text{constanté}} = \vec{a}_0 \quad \text{avec } \vec{a}_0 \text{ l'accélération de } M \text{ à l'instant initial } (t = 0) \\ \vec{v} = \vec{a}_0 \cdot t + \vec{v}_0 \quad \text{avec } \vec{v}_0 \text{ la vitesse de } M \text{ à l'instant initial} \\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \overrightarrow{OM}_0 \quad \text{où } M_0 \text{ est le point coïncident avec } M \text{ à l'instant initial} \end{array} \right.$$

Si  $\vec{a}_0$  et  $\vec{v}_0$  sont colinéaires, le mouvement est rectiligne (exemple : chute libre), sinon le mouvement est parabolique (exemple : projectile) contenu dans un plan défini par les vecteurs  $\vec{a}_0$  et  $\vec{v}_0$  et passant par  $M_0$ .

### 4) Mouvements circulaires

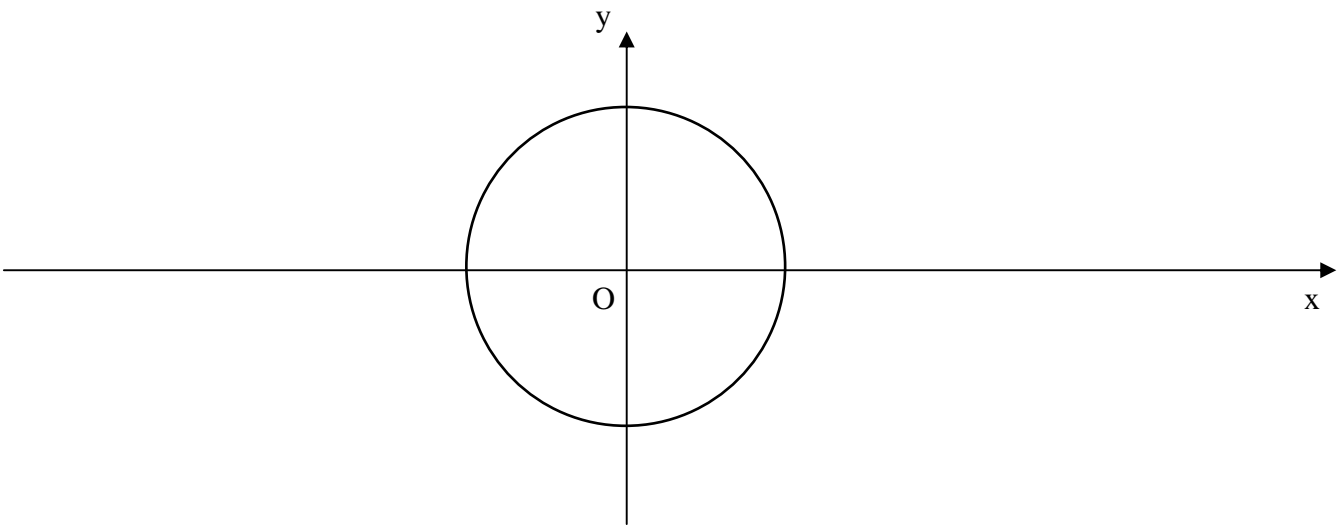
#### a) Définition

Un mouvement est dit circulaire s'il correspond à un déplacement le long d'un cercle fixe dans le référentiel d'étude.

La base de projection la mieux adaptée à l'étude du mouvement circulaire est la base polaire ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ).

En prenant arbitrairement l'origine du repère confondue avec le centre du cercle de rayon R et (Ox), l'axe polaire, les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point M s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \\ \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r \end{array} \right.$$



Remarques :

- la composante de l'accélération suivant le vecteur  $\vec{e}_r$  est appelée « composante radiale » et celle suivant  $\vec{e}_\theta$  « composante orthoradiale ».
- La vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est souvent notée  $\omega = \dot{\theta}$ .

**b) Cas du mouvement circulaire uniforme**

Dans le cas du mouvement uniforme, la norme de la vitesse est constante.

En prenant la vitesse angulaire positive il vient :  $\|\vec{v}\| = R\dot{\theta} = R\omega = \text{constante}$  soit  $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$ .

Par conséquent la composante orthoradiale de l'accélération est nulle ( $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0$ ) et **l'accélération est radiale** :  $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -R\omega^2\vec{e}_r$ .

**On constate que la norme de l'accélération est constante** et peut s'écrire  $\|\vec{a}\| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$ .

De plus, le vecteur accélération est dirigé vers le centre du cercle : **on dit que l'accélération est centripète.**

Remarques :

- On constate que les vecteurs accélération et vitesse sont orthogonaux. On retrouve la condition du mouvement uniforme  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ .
- On peut décrire le mouvement circulaire uniforme comme la composition de deux mouvements rectilignes sinusoidaux suivant (Ox) et (Oy) avec :

$$\begin{cases} x = R\cos(\theta) \\ y = R\sin(\theta) \end{cases} \text{ avec } \theta = \omega t + \varphi$$